5.4.2 Objemy a povrchy mnohostěnů I

Předpoklady: 5401

Význam slov objem i povrch je intuitivně jasný. Matematická definice musí být poněkud přesnější.

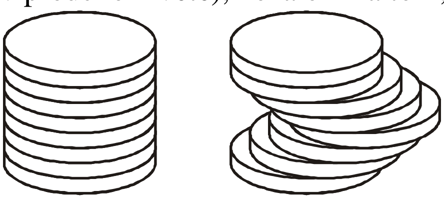
Opakování z planimetrie:
Obsah *S* obrazce je kladné číslo, přiřazené obrazci tak, že platí:
1. Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.
2. Skládá-li se obrazec z několika obrazců, které se navzájem nepřerývají, rovná se jeho obsah součtu jejich obsahů.
3. Obsah čtverce, jehož strana má délku 1 (mm, cm, m …) je 1 (mm^2, cm^2, m^2,…).

Př. 1: Vytvoř analogickou definici objemu tělesa.

Objem *V* tělesa je kladné číslo, přiřazené tělesu tak, že platí:
1. Shodná tělesa mají sobě rovné objemy.
2. Skládá-li se těleso z několika těles, která se navzájem nepronikají, rovná se jeho objem součtu jejich objemů.
3. Objem krychle, jejíž strana má délku 1 (mm, cm, m …) je 1 (mm^3, cm^3, m^3,…).

$\Rightarrow$ Objem kvádru o hranách 2cm x 3cm x 4 cm je $24\,cm^3$, protože ho můžeme rozložit na 24 krychliček o straně 1 cm (a objemu $1\,cm^3$).
$\Rightarrow$ Vzorec pro objem kvádru: $V = abc$.

Cavalieriho princip (umožňuje odvození dalších vzorců):
Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem.
Význam: Pokud máme dva stejné sloupce mincí (mince představují stejné rovinné útvary v předchozí větě), nezáleží na tom, jak jsou sloupce poskládané.



Oba sloupečky mají stejný objem.

Pedagogická poznámka: Filosofie následujících hodin je jiná než v klasických učebnicích pro gymnázia. Vzorce pro objemy a obsahy se neodvozují, žáci mohou využívat tabulky a cílem hodin je, aby se s nimi naučili pracovat (není to samozřejmé a správné použití vzorce už vyžaduje určitou míru orientace).

Pedagogická poznámka: U většiny příkladů jsou udávány v závorkách i hodnoty mezivýsledků kvůli snazší kontrole u studentů, kteří obecné odvozování nezvládají.

Všechny následující příklady řeš s pomocí tabulek. Pokud se setkáš s novým (neznámým) vzorcem, zapiš si jej a nakresli si obrázek daného tělesa.

Př. 2: Urči objem krychle, která má povrch $15\,\text{cm}^2$.

Objem krychle: $V = a^3$, délku hrany a musím určit z povrchu.
Povrch krychle: $S = 6a^2$

$a^2 = \frac{S}{6} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{S}{6}}$ ($a = 1{,}58\,\text{cm}$)

Dosadíme: $V = a^3 = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{15}{6}}\right)^3 \text{cm}^3 = 3{,}95\,\text{cm}^3$.

Krychle s povrchem $15\,\text{cm}^2$ má objem $3{,}95\,\text{cm}^3$.

Př. 3: Kvádr má rozměry v poměru 1:1,5:2. Urči jeho strany, pokud se jeho objem rovná $3000\,\text{cm}^3$.

Všechny strany vyjádříme pomocí velikosti té nejkratší:

a	x
b	$1{,}5\,x$
c	$2x$

Objem $V = abc = x \cdot 1{,}5x \cdot 2x = 3x^3$

$x^3 = \frac{V}{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3000}{3}}\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

Dopočítáme délky stran:

a	x	10 cm
b	$1{,}5\,x$	15 cm
c	$2x$	20 cm

Kvádr má strany 10, 15 a 20 cm.

Pedagogická poznámka: Pokud studenti neznají trik s vyjadřováním stran pomocí *x* (nebo v tomto případě klidně i *a*) a nemohou na něj přijít, je lepší jim poradit, než je dlouho napínat.

Př. 4: Hrana krychle se zvětší dvakrát. Kolikrát se zvětší její objem? Kolikrát se zvětší její povrch?

$V_0 = a^3$

$V_1 = (2a)^3 = 8a^3$

$\frac{V_1}{V_0} = \frac{8a^3}{a^3} = 8 \Rightarrow$ objem se zvětší 8x

$P_0 = 6a^2$

$P_1 = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2$

$\frac{P_1}{P_0} = \frac{24a^2}{6a^2} = 4 \Rightarrow$ povrch se zvětší 4x

Pedagogická poznámka: Většina studentů dojde k výsledkům přímočařeji. Myslím, že to je v pořádku.

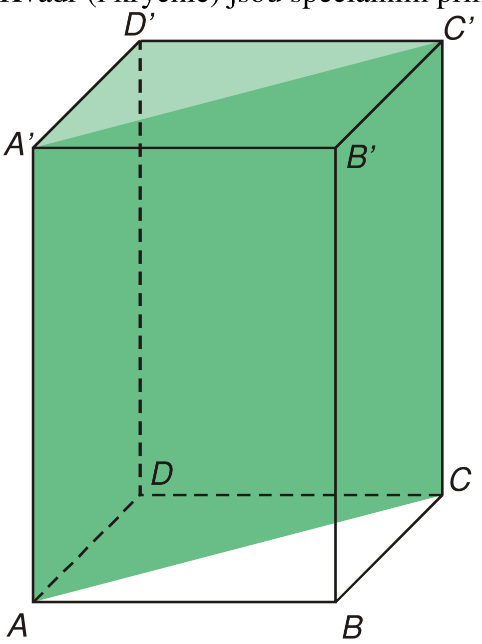
Př. 5: Na základě předchozího příkladu zkus vysvětlit některé z následujících jevů:
a) Vítr zvedá písek (malé kamínky), ale nezvedá větší balvany ze stejného materiálu.
b) Mravenec se nezabije ani při pádu ze čtvrtého patra (člověk většinou ano).
c) Velikost teplokrevných živočichů většinou vzrůstá se zeměpisnou šířkou jejich výskytu.

a) Vítr zvedá písek (malé kamínky), ale nezvedá větší balvany ze stejného materiálu.
Vítr zvedá kamínky odporem vzduchu, který je závislý na ploše kamínku. Zvednutí kamínku brání gravitační síla, která odpovídá hmotnosti a tím i objemu kamínku.
Pokud se kámen zmenší 100 x, jeho plocha se zmenší 10 000 x, ale hmotnost 1000 000 x $\Rightarrow$ s rozměry klesá hmotnost rychleji než plocha a tak u dostatečně malých kamenů převáží odpor vzduchu nad gravitací a vítr kamínek zvedne.

b) Mravenec se nezabije ani při pádu ze čtvrtého patra (člověk většinou ano).
Podobné jako v předchozím bodu. Pád zrychluje gravitace (závislá na objemu), brzdí ho odpor vzduchu (závislý na ploše). Čím je předmět lehčí, tím je poměr plocha/objem větší a pád pomalejší.

c) Velikost teplokrevných živočichů většinou vzrůstá se zeměpisnou šířkou jejich výskytu.
Teplokrevní živočichové se ve studenějších oblastech musejí vyrovnávat se ztrátou tepla, která závisí na jejich povrchu – tedy druhé mocnině rozměru. Velikost vnitřního prostředí, ve kterém musí živočich teplotu udržovat, je však rovná objemu těla, tedy třetí mocnině rozměru $\Rightarrow$ pro živočichy je výhodnější větší rozměr, protože větší tělo má vzhledem k objemu menší povrch a tedy i tepelné ztráty.

Kvádr (i krychle) jsou speciálním příkladem hranolů. Jak určíme objem jiných hranolů?



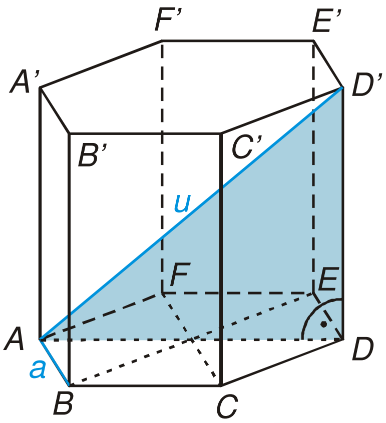
Hranol $ABCDA'B'C'D'$ můžeme rozložit na dva shodné kolmé pravoúhlé hranoly $ABCA'B'C'$ (průhledný) a $ACDA'C'D'$ (zelený) $\Rightarrow$ objem každého z nich se musí rovnat $V = \frac{abc}{2} = \frac{ab}{2} \cdot c = S_p \cdot c = S_p v$

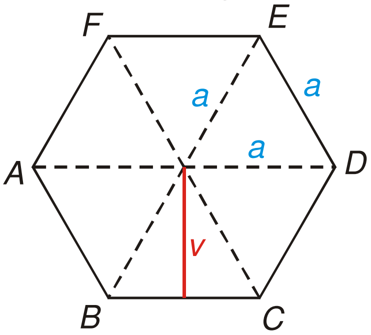
kde S_p je obsah podstavy a v je výška hranolu.

Podobně můžeme každý kolmý trojboký hranol rozložit na dva pravoúhlé a zjistit jeho objem jako součet objemů dvou pravoúhlých hranolů: $V = S_{p1}v + S_{p2}v = \left(S_{p1} + S_{p2}\right)v = S_p v$ - stejný vzorec pro kolmý hranol, jehož podstavou je obecný trojúhelník, jako pro kolmý hranol s podstavou pravoúhlou.
Každý další libovolný kolmý hranol můžeme rozdělit na hranoly s trojúhelníkovými podstavami $\Rightarrow$ vzorec $V = S_p v$ platí pro libovolný kolmý hranol.

Cavalieriho princip: vzorec $V = S_p v$ platí i pro nekolmé hranoly.

Př. 6: Urči objem a povrch kolmého pravidelného šestibokého hranolu $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ se stranou $a = |AB| = 4\,\text{cm}$ a tělesovou úhlopříčkou $u = |AD'| = 10\,\text{cm}$.





Obsah podstavy: skládá se z šesti shodných rovnostranných trojúhelníků $\Rightarrow$ obsah každého z nich: $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$.

Pro v_a platí (z Pythagorovy věty): $a^2 = v^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = v^2 + \dfrac{a^2}{4}$

$v^2 = \dfrac{3}{4}a^2 \Rightarrow v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ $\qquad (v_a = 3{,}46\,\text{cm})$

Obsah jednoho z trojúhelníků v podstavě: $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2} = \dfrac{a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Obsah podstavy: $S_p = 6S = 6\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. $\qquad (S = 41{,}6\,\text{cm}^2)$

Určení výšky hranolu z pravoúhlého trojúhelníku $AD'D$:

$u^2 = (2a)^2 + v^2$

$v^2 = u^2 - 4a^2 \Rightarrow v = \sqrt{u^2 - 4a^2}$ $\qquad (v = 6\,\text{cm})$

Objem hranolu: $V = S_p v = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2\sqrt{u^2 - 4a^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}4^2\sqrt{10^2 - 4 \cdot 4^2}\,\text{cm}^3 = 249\,\text{cm}^3$

Povrch hranolu: $P = 2S_p + S_{pl}$

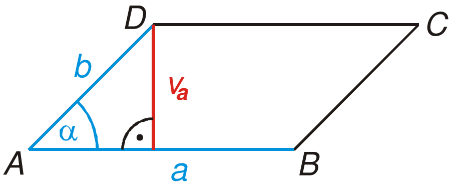
Obsah pláště: $S_{pl} = 6 \cdot S_o = 6 \cdot a \cdot \sqrt{u^2 - 4a^2}$ $\qquad (S_{pl} = 144\,\text{cm}^2)$

$P = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 + 6 \cdot a \cdot \sqrt{u^2 - 4a^2} = a^2 3\sqrt{3} + 6a\sqrt{u^2 - 4a^2}$

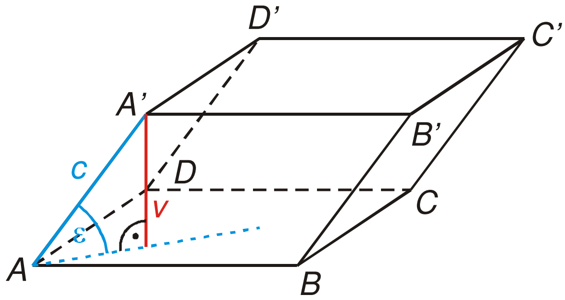
$P = a^2 \cdot 3\sqrt{3} + 6a\sqrt{u^2 - 4a^2} = 4^2 \cdot 3\sqrt{3} + 6 \cdot 4\sqrt{10^2 - 4 \cdot 4^2}\ \text{cm}^2 = 227\,\text{cm}^2$

Př. 7: Urči objem rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$, je-li dáno: $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, úhel $\alpha = 45°$, úhel $\varepsilon = 75°$ (úhel, který svírá strana AA' s rovinou podstavy.

$V = S_p v$



Obsah podstavy: $S_p = a \cdot v_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha$



Určení výšky: $\sin\varepsilon = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \cdot \sin\varepsilon$

$V = S_p v = a \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot \sin\varepsilon = abc \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon$

$V = abc \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varepsilon = 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 45° \cdot \sin 75°\,\text{cm}^3 = 82{,}0\,\text{cm}^3$

Př. 8: Petáková:
strana 96, cvičení 48
strana 96, cvičení 51
strana 96, cvičení 52

Shrnutí: